6　線積分と面積分

6.1　スカラー場の線積分

曲線 C が、$\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t)) : (a \leq t \leq b)$ で与えられているとします。このとき、スカラー場の関数 $f(x(t), y(t), z(t))$ に対して、

$$\int_C f dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) dt \tag{6.1}$$

を、曲線 C に沿ったスカラー場の線積分といいます。x 軸上の線分に沿った線積分である通常の 1 変数関数の積分の一般化だと言えます。C を積分路といいます。特に C の始点と終点が一致しているとき、C を閉曲線といい、$\displaystyle\int_C f dt$ を $\displaystyle\oint_C f dt$ と書いて閉積分といいます。C が曲線 C_1 と C_2 をつなげたものであるとき、$\displaystyle\int_C f dt = \int_{C_1} f dt + \int_{C_2} f dt$ が成り立ちます。また、曲線 C は向きも考えたものでないといけません。(6.1) の C は、t が a から b まで動いてできる曲線です。逆に、b から a まで動いてできる曲線を $-C$ と書きます。$\displaystyle\int_C f dt = -\int_{-C} f dt$ が成り立ちます。以下、曲線の向きは与えられた媒介変数が増加してできる向きとします。

(例１)　$\displaystyle\int_C xy^3 dt$、$C : y = 2x \ (-1 \leq x \leq 1)$ を求めます。

　C をベクトル方程式にすると $\boldsymbol{r} = (t, 2t) : (-1 \leq t \leq 1)$ なので、

$$\int_C xy^3 dt = \int_{-1}^1 t(2t)^3 dt = \frac{16}{5}$$

弧長 s による積分が求められる場合もあります。ds は線素です。(4.3 節)

(例２)　$\displaystyle\int_C xy^3 ds$、$C : y = 2x \ (-1 \leq x \leq 1)$ を求めます。

　$\boldsymbol{r} = (t, 2t) : (-1 \leq t \leq 1)$、また、(4.7) より、$\displaystyle\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{5}$

　よって、

$$\int_C xy^3 ds = \int_{-1}^1 t(2t)^3 \frac{ds}{dt} dt = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

同じ積分路 C に沿った線積分の和 $\displaystyle\int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz$ を簡略して、$\displaystyle\int_C [f dx + g dy + h dz]$ と書きます。

(例３)　$\displaystyle\int_C \big[xyzdx + (x+y+z)dy + (x^2y+z)dz\big]$、$C : y = 2x \ (z = 2\,,\ -1 \leq x \leq 1)$ を求めます。

　$\boldsymbol{r} = (t, 2t, 2) : (-1 \leq t \leq 1)$、また、$dx = dt$、$dy = 2dt$、$dz = 0$ より、

$$\begin{aligned}\int_C \big[xyzdx + (x+y+z)dy + (x^2y+z)dz\big] &= \int_{-1}^1 [t(2t)2dt + (t+2t+2)(2dt)] \\ &= \int_{-1}^1 4t^2 dt + 2\int_{-1}^1 (3t+2) dt = \frac{32}{3}\end{aligned}$$

6.2　ベクトル場の線積分

曲線 C が弧長 s を媒介変数として $\boldsymbol{r} = (x(s), y(s), z(s))$ で与えられているとします。このとき、ベクトル場の関数 $\boldsymbol{A} = (A_x(s), A_y(s), A_z(s))$ に対して

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\, ds \tag{6.2}$$

を、曲線 C に沿ったベクトル場の線積分といいます。$\boldsymbol{t}$ は、$\boldsymbol{r}$ の単位接線ベクトルです。(4.3 節) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}$ は、$\boldsymbol{A}$ の、$\boldsymbol{r}$ の接線方向の成分です。(4.9) より $\boldsymbol{t}\,ds = d\boldsymbol{r}$ なので、

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}\,ds &= \int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\,d\boldsymbol{r} &(6.3)\\ &= \int_C [A_x dx + A_y dy + A_z dz] &(6.4)\\ &= \int_C \left[A_x\frac{dx}{ds} + A_y\frac{dy}{ds} + A_z\frac{dz}{ds}\right] ds &(6.5)\end{aligned}$$

(6.4) は例 3 の問題と同じ形をしています。結局、スカラー場の線積分と同じ計算をすることになります。

(例 4)　$\boldsymbol{A} = (xy, x+y)$ として、$\displaystyle\int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}\,ds$、$C : y = x^2\ (-1 \le x \le 1)$ を求めます。

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}\,ds &= \int_C \boldsymbol{A}\boldsymbol{\cdot}\,d\boldsymbol{r}\\ &= \int_{-1}^{1}[xydx + (x+y)dy]\\ &= \int_{-1}^{1} xx^2dx + \int_{-1}^{1}(x+x^2)(2xdx) = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

(例 5)　質量 m の物体が力 $\boldsymbol{F}$ を受けて、軌道 C を描いて運動しているとします。このとき、$\boldsymbol{F}$ が物体にする仕事を求めましょう。

仕事 W は、力の変位方向の成分と距離の積で与えられます。すなわち、$\Delta W = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}\Delta s$ です。したがって、$W = \displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{t}ds$ となります。時間を t、速度を $\boldsymbol{v}$ とすると、

$$\begin{aligned}w = \int_C \boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot}\,d\boldsymbol{r} &= \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v}dt = \int_{t_0}^{t} m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v}dt\\ &= \int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}(\frac{m}{2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{v})dt = \frac{m}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}(|\boldsymbol{v}|^2)dt = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}^2(t) - \boldsymbol{v}^2(t_0))\end{aligned}$$

仕事は、C の端点での運動エネルギーの差で与えられることが分かりました。

6.3　グリーンの定理

xy 平面で、単一閉曲線 C(自分自身と交わらない閉曲線) に囲まれた領域を R とします。C は、進行方向に対して R が常に左側にあるような向きとします。このとき、関数 f、g に対して、

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \int_C (fdx + gdy) \tag{6.6}$$

が成り立ちます。これをグリーンの定理といいます。線積分と 2 重積分を変換する定理です。

図のような単純な図形について成り立つことを証明します。C を上半分と下半分に分け、それぞれ $C_1 : y = u(x), (a \le x \le b)$、$C_2 : y = v(x), (a \le x \le b)$ とします。すると、

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy &= \int_a^b dx\int_{v(x)}^{u(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy = \int_a^b [f(x,u(x)) - f(x,v(x))]\\ &= \int_{C_1} f(x,u(x))dx - \int_{C_2} f(x,v(x))dx\\ &= -\left(\int_{-C_1} f(x,u(x))dx + \int_{C_2} f(x,v(x))dx\right) = -\int_C f(x,y)dx\end{aligned}$$

$\displaystyle\iint_R \frac{\partial g}{\partial x}dxdy$ についても同様の計算をすれば (6.6) が得られます。

(例６)　$\int_C (ydx - 2xdy)$ を求めます。C は単位円周上を点 $(0,1)$ から反時計周りに１回転するものとします。

素直に計算すると、$x = \cos\theta$、$y = \sin\theta$ とおいて、

$$\int_C (ydx - 2xdy) = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta d\theta + 2\cos^2\theta d\theta) = \int_0^{2\pi} (\frac{3}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}) = \pi$$

となります。グリーンの定理を適用してみましょう。

$$\int_C (ydx - 2xdy) = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x} 2x - \frac{\partial}{\partial y} y \right) dxdy = \iint_R dxdy$$

これは単位円の面積なので π となります。

R の面積を S とします。(6.6) において、$f = 0$、$g = x$ とおくと $S = \iint_R dxdy = \int_C xdy$、$f = -y$、$g = 0$ とおくと、$S = \iint_R dxdy = -\int_C xdy$ となります。これらより、

$$S = \frac{1}{2} \int_C (xdy - ydx) \tag{6.7}$$

(例７)　カージオイド $r = a(1 - \cos\theta)$ の面積を求めます。

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおくと、(6.7) は、

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C r\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) - \frac{1}{2} \int_C r\sin\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2} a^2 \end{aligned}$$

グリーンの定理を別の形で表してみます。$\boldsymbol{v} = (g, -f)$ とおくと、

$$\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R \mathrm{div}\boldsymbol{v} dxdy$$

また、

$$\int_C (fdx + gdy) = \int_C \left(f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} \right) ds = \int_C (g, -f) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) ds$$

ここで、C を表す方程式 $\boldsymbol{r}$ の単位接線ベクトルは $\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$ です。$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \cdot \left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right) = 0$ より、$\left(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right)$ は $\boldsymbol{r}$ の単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$です。すなわち、

$$\iint_R \nabla \cdot \boldsymbol{v} dxdy = \int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds \tag{6.8}$$

6.4　スカラー場の面積分

曲面 S の方程式が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ で与えられているとします。このとき、スカラー場の関数 $f(x, y, z)$ に対して、$\iint_S f dS$ を、S 上でのスカラー場 f の面積分といいます。dS は面積素です。(4.16) より、

$$\iint_S f dS = \iint_S f \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv \tag{6.9}$$

となり、通常の２重積分に帰着できます。面積分は、xy 平面上での面積分である２重積分の一般化だといえます。

(例８)　$\iint_S (x + y + z) dS$、$S : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1$ を求めます。

S は、$\boldsymbol{r} = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ とおけます。$\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \times (0,0,1) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ なので、

$$\begin{aligned}\iint_S (x+y+z)dS &= \iint_S (\cos\theta + \sin\theta + z) \cdot 1 d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\cos\theta + \sin\theta + z)dz = \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta + \frac{1}{2})d\theta = \pi\end{aligned}$$

6.5　ベクトル場の面積分

曲面 S の方程式が $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ で与えられているとします。このとき、ベクトル場の関数 $\boldsymbol{A}(A_x, A_y, A_z)$ に対して、$\displaystyle\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を、S 上でのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の面積分といいます。$d\boldsymbol{S}$ はベクトル面積素です。

(4.19) より、

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \pm \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) dudv \tag{6.10}$$

$\boldsymbol{n}$ には２つの向きがあることに注意しましょう。

(例９)　例８の S に対して、$\displaystyle\iint_S (x,y,z) \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めます。ただし、$\boldsymbol{n}$ は内側から外側に向かう向きとします。

$$\iint_S (x,y,z) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S (\cos\theta, \sin\theta, z) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0) dz d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz = 2\pi$$

$\boldsymbol{n}$ と x、y、z 軸がなす角をそれぞれ α、β、γ とすると、$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ と表せます。ここで、(4.16)、(4.18) より、$\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right)$ の x 成分を $\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right)_x$ として、

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right)_x}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right|} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right)_x \frac{dudv}{dS}$$

$\boldsymbol{r} = (f(y,z), y, z)$ と表すと、

$$\begin{aligned} dS\cos\alpha &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} \right)_x dydz \\ &= \left((\frac{\partial f}{\partial y}, 1, 0) \times (\frac{\partial f}{\partial z}, 0, 1) \right)_x dydz \\ &= dydz \end{aligned} \tag{6.11}$$

これは、曲面上の微小面積 dS の yz 平面への正射影が $dydz$ となることを表しています。

同様に $dS\cos\beta = dzdx$、$dS\cos\gamma = dxdy$ が成り立つので (6.10) は、

$$\begin{aligned} \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \iint_S (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) dS \\ &= \iint_S (A_x dydz + A_y dzdx + A_z dxdy) \end{aligned} \tag{6.12}$$

となります。

(例 10)　(6.12) を用いて例９を解きます。

$$\iint_S (x,y,z) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

(2.6) を用いて $x = \cos\theta$、$y = \sin\theta$、$z = z$ と変数変換すると、$dydz = \cos\theta d\theta dz$、$dzdx = \sin\theta d\theta dz$、$dxdy = 0 \cdot d\theta dz$ より、

$$\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint_S \cos^2\theta d\theta dz + \sin^2\theta d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz$$

6.6 ガウスの発散定理

(5.2) 節を見てください。$v_x(x,y,z)dydz$ は、微小長方形上での $\boldsymbol{v}$ の面積分です。すなわち、S を微小直方体の表面とすると、$\displaystyle\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \nabla\cdot\boldsymbol{v}dxdydz$ です。一般の閉曲面 S と、それに囲まれた領域 V を考えます。V を細かく分割して微小直方体に分けて、それぞれの直方体の表面 S_i について面積分を行うと、$\displaystyle\sum_i\iint_{S_i}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}_i = \sum_i \nabla\cdot\boldsymbol{v}dxdydz$ となります。隣り合う直方体の共通の面上での面積分は、$\boldsymbol{n}$ の符号が逆なだけので打ち消しあって 0 になります。よって打ち消しあう相手のない面、すなわち曲面 S 上の面積分だけが残って、$\displaystyle\sum_i\iint_{S_i}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}_i = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$ となります。以上より、ガウスの発散定理

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV \tag{6.13}$$

が導かれました。$\displaystyle\iiint_V$ を $\displaystyle\int_V$、$dxdydz$ を dV と書いています。この定理を用いて面積分を 3 重積分に変換することで計算が楽になる場合があります。

6.7 ストークスの定理

(5.3) 節を見てください。$F_x(x,y)dx$ は、微小長方形のひとつの辺上での線積分ですので、C を微小長方形の周辺とすると $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \nabla\times\boldsymbol{F}dxdy$ となります。xy 平面上の一般の閉曲線 C とそれに囲まれた領域 S に対して (6.13) の証明と同様の手法を取ると、2 次元のストークスの定理

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}dS \tag{6.14}$$

が導かれます。$\displaystyle\iint_S$ を $\displaystyle\int_S$、$dxdy$ を dS と書きました。証明は省略しますが、3 次元の曲線 C に対しても (6.14) は成り立ちます。この定理を用いて線積分を 2 重積分に変換することで計算が楽になる場合があります。

(6.8)、(6.13)、(6.14) を比べてみましょう。

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds &= \int_S \nabla\cdot\boldsymbol{A}dS \\
\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS &= \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}dV \\
\int_C \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds &= \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}dS
\end{aligned}$$

数学の美しさのひとつとしてよく取り上げられます。