# 第3章　流体力学の基礎方程式

2.1 節では, 流体の運動を記述するために必要な変数は流速 $\boldsymbol{v}$ と独立な熱力学的変数 2 個であり, これらの未知変数を決定するために必要な法則は, **質量保存則**, **運動量保存則**, **エネルギー保存則**であることを述べた．本章では, これらの保存則を具体的に書き下すことにより, 流体力学の基礎方程式を提示する.

## 3.1　連続の式

流体は不生不滅であることを具体的に書き表した数式が**連続の方程式**(equation of continuity) である．先ず Lagrange 的立場から連続の方程式を導く．続いて Euler 的立場からも同様の方程式が導けることを示す.

### 3.1.1　Lagrange 的立場からの導出

各辺の長さが $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ の微小体積要素 (体積 $\delta V = \delta x\,\delta y\,\delta z$) の流体粒子を考える．流体の密度を $\rho$ とすると物質は不生不滅であるから，流れに伴って質量は変化しない，すなわち

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = 0. \tag{3.1}$$

(3.1) を整理すると，

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{\rho}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt} \tag{3.2}$$

となる．右辺は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta V}\frac{D\delta V}{Dt} &= \frac{1}{\delta x}\frac{D\delta x}{Dt} + \frac{1}{\delta y}\frac{D\delta y}{Dt} + \frac{1}{\delta z}\frac{D\delta z}{Dt} \\ &= \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \end{aligned} \tag{3.3}$$

と変形できる．ここで，$(u, v, w)$ は $x$, $y$, $z$ 方向の流体の速度である．$\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$, $\delta z \to 0$ の極限をとると

$$\lim_{\delta x \to 0,\, \delta y \to 0,\, \delta z \to 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D \delta V}{Dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}.$$

したがって，質量保存則 (3.1) は

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.4}$$

となる．Lagrange 微分の定義を用いて，(3.4) は以下のように書きなおせる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{3.5}$$

これが連続の式，もしくは連続の方程式，である．(3.5) はしばしば **Euler の連続の式**と呼ばれる．[1]

**演習問題**

1. (3.4) は (3.5) と書けることを確かめなさい.

• **非圧縮性流体の場合:**　このとき運動中に密度が一様に保たれる，$\frac{D\rho}{Dt} = 0$, ので連続の方程式は,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.6}$$

となる.

### 3.1.2　Euler 的立場からの導出

　連続の式 (3.5) は Euler 的立場からも以下のように導かれる．空間に固定された任意の閉曲面 S を考える.[2]　S に囲まれた領域を V とする. 任意の時刻で V に含まれる質量は,

$$\iiint_V \rho \, \mathrm{d}V$$

[1](3.5) は Largange 的観点からの考察によって導かれたが，独立変数を $x$, $y$, $z$, $t$ とする場の変数の偏微分方程式になっているので，Euler 的観点の記述になっている.

[2]Euler 的観点なので, 考察の対象とする曲面は空間に固定されていて, 形は変えない.

である．そこで単位時間あたりの V の質量変化は,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

と表せる．いっぽう上記の質量変化は単位時間に V の表面 S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量に等しい筈である．単位時間に微小面積 $\mathrm{d}S$ を通過する流体の質量は, 底面 $\mathrm{d}S$, 高さ $v_n$ の円柱に含まれる流体の質量に等しい．ここで, $v_n$ は流速 $\boldsymbol{v}$ の微小面積に垂直な成分で $v_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ である (図 3.1 参照)．そこで, 単位時間に S を通って V 内に流れ込んだ流体の質量は

$$-\iint_{\mathrm{S}} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = -\iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}V$$

である．ここで S の表面に立てられた法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は外向きであるため, 流れ込む流体に対しては負符号が付くことに注意せよ．また右辺への変形に Gauss の発散定理 (0.3 節参照) を用いた．以上の考察から質量保存則は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\,\mathrm{d}V = -\iiint_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\ \mathrm{d}V.$$

または,

$$\iiint_{\mathrm{V}} \left\{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v})\right\}\ \mathrm{d}V = 0, \tag{3.7}$$

と表せる．(3.7) は積分形の質量保存則である．領域 V は任意なので, 上式が恒等的に成り立つためには被積分関数は 0 でなければならない．したがって, 質量保存則は微分形で

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.8}$$

となる．(3.8) の左辺第 2 項，$\rho\boldsymbol{v}$ は質量流束（質量フラックス）と呼ばれる．(3.8) は，質量が保存されるならば，ある点における密度の時間変化は，質量フラックスの収束・発散に等しいことを表している．

一般にある物理量 $a$ が, そのフラックス $\boldsymbol{F}_a$ と $a$ の生成・消滅項 $Q_a$ によって

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}_a = Q_a \tag{3.9}$$

と表現されるとき，これを**フラックス形式**という．$Q_a = 0$ のとき $a$ はフラックス形式の保存則に従う，という．すなわち，流体力学には 2.3 節で述べた Lagrange 形式の保存則の他に，フラックス形式の保存則がある．

**演習問題**

1. 和の規約を用いて, 連続の式 (3.8) を表現しなさい.

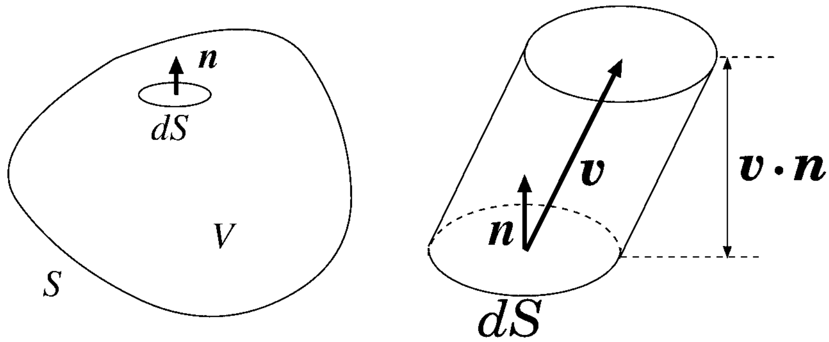


図 3.1: 質量保存則を適用する任意の体積 V と単位時間あたり微小面積領域 d$S$ を通過する流体の体積.

## 3.2　運動方程式

“ある物体の運動量の時間変化は, それに作用している力の総和に等しい”, という Newton の第二法則を流体に対して適用し, 具体的に書き表した数式がここで述べる運動方程式である．前章と同様に Lagrange 的立場から運動方程式を導出する．つぎに Euler 的立場から運動方程式を導出する．3.2.1 節では非粘性流体を，3.2.2 節では一般的な流体を考察することにする．

### 3.2.1　Lagrange 的立場からの導出

本節では，簡単化のために非粘性流体を考察する．3.1.1 節と同様に，微小体積 $\delta V$ の流体粒子を考える．Newton の第二法則によれば，流体粒子の運動量の時間変化は，それに働く力の総和に等しい．ここで，流体粒子に働く力には面積力（応力）と体積力がある．単位質量当たりに働く体積力を $\boldsymbol{\kappa}$ とする．また，単位体積

当たりに働く応力に伴う力[3]は $-\boldsymbol{\nabla} p$ であるので（ (1.8) 参照），

$$\frac{D(\rho\delta V\boldsymbol{v})}{Dt} = (-\boldsymbol{\nabla} p)\delta V + \rho\delta V\boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{3.10}$$

と書ける．質量保存則

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = 0$$

を用いて整理すると，(3.10) は

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{3.11}$$

と書ける．(3.11) は非粘性流体の運動方程式であり，**Euler の方程式**と呼ばれる．

単位質量あたりの体積力としては重力がある：

$$\boldsymbol{\mathcal{K}} = -g\boldsymbol{k}. \tag{3.12}$$

### 3.2.2 Euler 的立場からの導出

本節では，粘性を含んだより一般的な流体を考察する．ここでは表記に和の規約を用いる．空間に固定された閉曲面 S を考える．S に囲まれた領域を V とする. V に含まれる流体が持つ $i$ 方向の運動量は $\int_{\mathrm{V}} \rho\, v_i\, \mathrm{d}V$ である. したがって, 単位時間あたり V に含まれる流体の運動量の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\, v_i\, \mathrm{d}V$$

である.

考える流体に作用する力は体積力と面積力である. $i$ 方向に働く面積力は応力テンソル $\tau_{ij}$ を用いて,

$$\iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j\, \mathrm{d}S$$

と表せる．また単位質量あたりに働く $i$ 方向の体積力を $\mathcal{K}_i$ とすると V に働く $i$ 方向の体積力は

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho\mathcal{K}_i\, \mathrm{d}V$$

[3]非粘性流体では応力は圧力のみである.

と表せる．

上記の効果以外に流体が運動量を携帯して S を通じて V 内に流入する効果がある．すなわち流体が" 流れる" ことに起因した項がさらに付加される．これは Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により，

$$-\iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S$$

と表せる.[4]　以上の議論から V 内の運動量の時間変化は, V に働く体積力, S に作用する面積力と S を通じて流れ込む運動量との総和に等しい．したがって,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}} \rho\, v_i \,\mathrm{d}V = \iiint_{\mathrm{V}} \rho\mathcal{K}_i \,\mathrm{d}V + \iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S - \iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{3.13}$$

上式右辺第二項と第三項を 0.3 節の Gauss の定理を用いて変形する．このとき，これらは

$$\iint_{\mathrm{S}} \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S - \iint_{\mathrm{S}} (\rho v_i)\ v_j n_j \,\mathrm{d}S = \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} - \rho v_i v_j)\,\mathrm{d}V$$

と書き換えられる．したがって (3.13) は

$$\iiint_{\mathrm{V}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) - \rho\mathcal{K}_i - \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) \right\} \mathrm{d}V = 0 \tag{3.14}$$

となる．ここで V が任意であることを考慮すると, 上式の被積分関数はゼロでなければならない．したがって, 微分形の運動量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \rho\mathcal{K}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} \tag{3.15}$$

が得られる．

さらにこの方程式を書き換える．(3.15) の左辺を展開する:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= v_i \frac{\partial}{\partial t}\rho + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) &= \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j). \end{aligned}$$

このうち第一式右辺第一項と第二式右辺第二項は連続の方程式 (3.8) より相殺される．そこで (3.15) は

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \rho\mathcal{K}_i,$$

[4] 図 3.1 参照. 連続の式の導出では, V の表面を通じて流入する流体の質量を考えたので, 微小体積 $v_n \mathrm{d}S$ に密度を乗じた．ここでは運動量保存則を考えるので, V の表面を通じて流入する流体の運動量は, 微小体積 $v_n \mathrm{d}S$ に運動量密度 $\rho\boldsymbol{v}$ を乗ずればよい．

または密度 $\rho$ で両辺を割って

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \mathcal{K}_i, \tag{3.16a}$$

と書ける．これが求めるべき運動方程式である．Lagrange 微分を用いると (3.16a) は以下のようになる：

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \mathcal{K}_i. \tag{3.16b}$$

• **非粘性流体の場合：** 非粘性流体の場合には, 応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \tag{3.17}$$

なので, 運動方程式 (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mathcal{K}_i \tag{3.18a}$$

となる．(3.18a) をベクトル形式で書くと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \boldsymbol{\mathcal{K}}, \tag{3.18b}$$

となる．

• **Newton 流体の場合：** 応力テンソルが (1.16) で表される Newton 流体では, 運動方程式 (3.16) は

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \mathcal{K}_i, \tag{3.19a}$$

ベクトル形式では

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \frac{1}{3}\nu\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \boldsymbol{\mathcal{K}}, \tag{3.19b}$$

と書ける．ここで $\nu = \mu/\rho$ は動粘性係数 (kinematic viscosity) と呼ばれる．(3.19) は **Navier-Stokes 方程式**(Navier-Stokes equation) と呼ばれ, 実在の流体の運動を極めてよく記述する方程式である．

## 3.3　エネルギー論

前節で導いた運動方程式から, 運動エネルギーに関する方程式を導出してみる. 前節と同様に和の規約を用いることにする. (3.16a) に $\rho v_i$ を乗じると,

$$\rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho v_i \mathcal{K}_i,$$

上式左辺は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v_i v_j\right) - \frac{1}{2} v_i v_i \underbrace{\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j}\right)}_{\text{連続の式よりゼロ}}$$

と表現できる. 次に右辺第一項は,

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} - \tau_{ij} e_{ij} \end{aligned} \tag{3.20}$$

上式の最後の表現には $\tau_{ij}$ が対称テンソルである ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) ことを用いた. また,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.21}$$

である. したがって, 単位体積あたりの運動エネルギーを $\mathcal{T} = \frac{1}{2} v_i v_i$ とすると, その発展方程式は

$$\frac{\partial (\rho \mathcal{T})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \mathcal{T} v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial (\tau_{ij} v_i)}{\partial x_j} + \rho v_i \mathcal{K}_i - \tau_{ij} e_{ij}, \tag{3.22}$$

となる.

質点系の力学では運動エネルギーとポテンシャルとの和が保存されるが, 流体力学では, たとえ流体粒子 (流体素片) に働く外力 $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ がゼロであっても (ポテンシャルへの寄与はこの項から生じる), 流体粒子の運動エネルギーは保存しないことに注意するべきである. 力学的エネルギーのみでは保存則は成立せず, 力学的エネルギーと内部エネルギーの和が保存するのである. (3.22) の右辺最終項が, 運動エネルギーと内部エネルギーとの間の変換を表す項になっている. このことは, 応力テンソル $\tau_{ij}$ を具体的に表現すると分かりやすい.

• **非粘性流体の場合：**　非粘性流体の場合には, 応力テンソルは圧力のみで

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

なので, (3.20) は

$$-\frac{\partial\left(pv_j\right)}{\partial x_j} + pe_{jj}$$

となる．したがって, (3.22) は

$$\frac{\partial\left(\rho\mathcal{T}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho\mathcal{T}+p\right)v_j}{\partial x_j} = \rho v_i\mathcal{K}_i + pe_{kk}, \tag{3.23a}$$

もしくはベクトル形式で

$$\frac{\partial\left(\rho\mathcal{T}\right)}{\partial t} + \nabla\cdot\left\{\left(\rho\mathcal{T}+p\right)\boldsymbol{v}\right\} = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\mathcal{K}} + p\nabla\cdot\boldsymbol{v}, \tag{3.23b}$$

となる．

• **Newton 流体の場合：**　応力テンソルが (1.16) で表される Newton 流体では, (3.20) 式は,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-pv_j + 2\mu\left(e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j\right)\right\} - \left\{-pe_{jj} + 2\mu\left(e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj}\right)\right\}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij})^2 &= e_{ij}e_{ij} - \frac{2}{3}e_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{9}e_{kk}e_{kk}\underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{=3} \\ &= e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}e_{jj}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

したがって, (3.22) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\rho\mathcal{T}\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\rho\mathcal{T}+p\right)v_j - 2\mu\left(e_{ij}v_i - \frac{1}{3}e_{kk}v_j\right)\right\}& \\ = \rho v_i\mathcal{K}_i + pe_{kk} - \Phi,&\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\Phi = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij})^2 \tag{3.26}$$

$\Phi$ は散逸関数 (dissipation function) と呼ばれ, 正の量である．これは粘性の効果による運動エネルギーの散逸を表している．この散逸された運動エネルギーは熱力学的エネルギーの方程式の加熱項になる．このことは熱力学的エネルギーの方程式の導出の際にもう一度振り返ることにする．

## 3.4　熱力学的エネルギーの方程式

“ある系の内部エネルギーと運動エネルギーとの和の時間変化率は, その系に流入する内部エネルギー, 運動エネルギー, 熱流の和, 系に働く力がする仕事, さらに系内の熱源による加熱に等しいという”, というエネルギー保存則を具体的に書き表した数式がここで述べるエネルギー方程式である. Euler 的立場からの導出を行う.

空間に固定された閉曲面 S を考える. S に囲まれた領域を V とする. V に含まれる流体が持つ内部エネルギーと運動エネルギーの和 (全エネルギー) は $\int_V \rho\ (\mathcal{T} + \mathcal{U})\ \mathrm{d}V$ である. ここで, 単位質量あたりの運動エネルギーと内部エネルギーをそれぞれ $\mathcal{T}, \mathcal{U}$ と表した. 単位時間あたり V に含まれる流体の全エネルギーの時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{\mathrm{V}} \rho\ (\mathcal{T} + \mathcal{U})\ \mathrm{d}V$$

である. 考える流体に作用する力は体積力と面積力である. 体積力と面積力が系 V にする仕事は, 単位時間当たり

$$\iiint_{\mathrm{V}} \rho v_i \mathcal{K}_i \,\mathrm{d}V + \iint_S v_i \tau_{ij} n_j \,\mathrm{d}S$$

と表せる.[5] S を通じて V 内に流入する全エネルギーは, Euler の連続の方程式を導出するときに行ったものと同様の議論により,

$$-\iint_S \{\rho\,(\mathcal{T} + \mathcal{U})\}\ v_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{3.27}$$

と表せる. さらに, 流体内の温度が一様でないとき, 流体の運動とは無関係に熱の移動が起こる. これは**熱伝導** (thermal diffusivity) と呼ばれ, 流体を構成する原子・分子の熱的振動に伴って発生する現象である. 熱伝導に伴う熱流 $\boldsymbol{\theta}$ は S を通じて V 内に流入する. この効果は

$$-\iint_S \theta_j n_j \,\mathrm{d}S \tag{3.28}$$

と表せる.[6]

[5]物体に力 $\boldsymbol{F}$ が働いている時に, その物体を $\boldsymbol{r}$ だけ動かすのに要する仕事は, $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$ である.

[6]温度勾配があまり大きな値をとらない範囲では, 熱伝導は **Fourier の法則**によってよく記述できる. Fourier の法則は

$$\boldsymbol{\theta} = -\square\nabla T \tag{3.29}$$

と表せる. □ は**熱伝導率**と呼ばれる.

また, 単位質量あたりの流体の加熱率を $J$ とする．このときエネルギー保存則より V 内のエネルギーの時間変化は, V に働く体積力がする仕事, S を通じて作用する面積力がする仕事, S を通じて V 内に流れ込む全エネルギーと熱伝導に伴う熱流, さらに系内の熱源による加熱率の総和に等しいので,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{\mathrm{V}}\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)\mathrm{d}V &= \iiint_{\mathrm{V}}\rho v_i\mathcal{K}_i\,\mathrm{d}V+\iint_{S}v_i\tau_{ij}n_j\,\mathrm{d}S\\ &\quad-\iint_{S}\left[\left\{\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)\right\}v_j+\theta_j\right]n_j\,\mathrm{d}S\\ &\quad+\iiint_{\mathrm{V}}\rho J\mathrm{d}V \qquad (3.30)\end{aligned}$$

上式右辺第二, 三項を 0.3 節の Gauss の定理を用いて変形すると

$$-\iiint_{\mathrm{V}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\mathcal{T}v_j+\rho\mathcal{U}v_j-v_i\tau_{ij}+\theta_j\right)\mathrm{d}V \qquad (3.31)$$

と書き換えられる．したがって V が任意であることを考慮すると, 微分形のエネルギー方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\rho\left(\mathcal{T}+\mathcal{U}\right)v_j\right\}=\frac{\partial\left(v_i\tau_{ij}\right)}{\partial x_j}-\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+\rho v_i\mathcal{K}_i+\rho J \qquad (3.32)$$

となる．力学的エネルギーの方程式 (3.22) を (3.32) から引くと, 単位体積あたりの内部エネルギーに関する方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\mathcal{U}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\rho\mathcal{U}\right)v_j\right\} = \tau_{ij}e_{ij}-\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+\rho J \qquad (3.33)$$

が得られる．さらに連続の式を考慮すると, (3.33) は Lagrang 微分を用いて

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt}=\frac{1}{\rho}\tau_{ij}e_{ij}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_j}{\partial x_j}+J \qquad (3.34)$$

となる．

**• 非粘性流体の場合：** 非粘性流体の場合には, 応力テンソルは $\tau_{ij}=-p\delta_{ij}$ なので, (3.34) の右辺第一項は

$$\tau_{ij}e_{ij}=-pe_{jj}=-p\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \qquad (3.35)$$

と変形される．さらに上式最後の表現に連続の式

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=-\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$$

を用いると (3.34) は

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \tag{3.36}$$

となる．熱流 $\boldsymbol{\theta}$ がゼロのとき, (3.36) は, 熱力学の第一法則 $\delta U + p\delta(\frac{1}{\rho}) = \delta Q$ において, 熱力学的な状態の変化が単位時間に起こったと考えて $\delta$ の記号を Lagrange 微分 $\frac{D}{Dt}$ で置き換えたものと同じ形式になっている．

- **Newton 流体の場合：**　Newton 流体の場合には, (3.34) の右辺第一項は

$$\tau_{ij}e_{ij} = -pe_{jj} + \Phi \tag{3.37}$$

となる．したがって (3.34) は

$$\frac{D\mathcal{U}}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \Phi - \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\theta} + J \tag{3.38}$$

この場合に熱力学的エネルギー方程式には, 非粘性流体の熱力学的エネルギー方程式に, 粘性による力学的エネルギーの散逸に伴う項（右辺第二項の $\Phi$）が, 加熱項として加わっていることがわかる．（(3.25) 参照.）