保存形 IDO 法

Conservative IDO Scheme

○ 青木尊之，東工大，東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: taoki@gsic.titech.ac.jp
今井陽介，東工大，東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: yimai@sim.gsic.titech.ac.jp
Takayuki AOKI, Tokyo Institute of Technology, O-okayama 2-12-1, Meguro-ku, Tokyo, Japan
Yohsuke IMAI, Tokyo Institute of Technology, O-okayama 2-12-1, Meguro-ku, Tokyo, Japan

The conservative IDO scheme has been developed in the flux form. The integrated value between grids is also introduced as an independent variable. By using Runge-Kutta time integration, the scheme gives us stable and accurate results. In the shock tube problem, a better result has been obtained.

1. 緒言

これまで局所補間微分オペレータ(Interpolated Differential Operator: IDO)法[1]は偏微分方程式に対して primitive 変数を非保存形で解くことにより、十分高い精度で計算結果を示してきた。しかし、圧縮性流体の長時間計算などでは全質量の増加が無視できない量になったり、衝撃波速度を精度よく解くためには人工粘性係数の調節が必要になっていた。

そこで、保存形で定式化された方程式に対し、IDO 法の手法を用いて方程式の形のまま高精度に計算する保存形 IDO 法を開発する。

2. 質量保存方程式

従来の IDO 法[1]は物理量の値と空間微係数を従属変数として用いていたが、保存形 IDO 法でも保存形 CIP 法[2]と同様に区間積分値を従属変数として加える。1 次元の質量保存方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial uf}{\partial x}=0 \tag{1}$$

の場合で示すと、

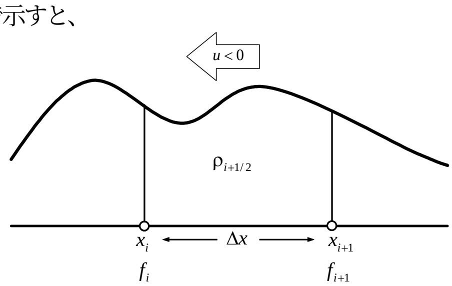

Fig.1 Definition of dependent variables in the Conservative IDO scheme

Fig.1 のように、密度を格子点 $x=x_i$ で f_i として定義し、$x_i \le x \le x_{i+1}$ の区間で密度を積分した量を

$$\rho_{i+1/2}=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f dx \tag{2}$$

と定義する。$x_i \le x \le x_{i+1}$ の区間の補間関数 $F(x)$ は、3 個の拘束条件 $F(x_i)=f_i$，$F(x_{i+1})=f_{i+1}$，$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} F(x)dx=\rho_{i+1/2}$ から

$$F(x)=ax^2+bx+f_i \tag{3}$$

$$a=\frac{3f_{i+1}+3f_i}{\Delta x^2}-\frac{6\rho_{i+1/2}}{\Delta x^3}\ ,\quad b=\frac{6M_j}{\Delta x^2}-\frac{2f_{j+1}+4f_j}{\Delta x}$$

と求まる。(1) 式の第 2 項の f の空間微分項に風上方向の(3)式を適用すると、速度 $u<0$ のとき、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial t}&=-uF_x^n(x_i)-f_i\frac{\partial u}{\partial x}\\&=-u\left(\frac{6\rho_{i+1/2}^n}{\Delta x^2}-\frac{2f_{i+1}^n+4f_i^n}{\Delta x}\right)-f_i\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned} \tag{4}$$

となる。区間積分値に対しては、(1)式を $x_i \le x \le x_{i+1}$ の区間で積分することにより

$$\frac{\partial \rho_{i+1/2}}{\partial t}+u_{i+1}f_{i+1}^n-u_if_i^n=0 \tag{5}$$

を得る。f の計算は非保存形であるが、(5)によって保存される ρ で拘束されているために、f の保存性も極めてよい。計算を安定化させるために、(4)と(5)をルンゲクッタ法などを用いて 3 次以上の精度で時間積分する必要がある。(5)式の計算がセミ・ラグランジュ法を用いる保存形 CIP 法[2]と大きく異なり、多次元への拡張を容易にする。

3. 波動方程式

非保存形 IDO 法は複数の特性線をもつ波動方程式に対しても高精度に解くことが可能である。保存形で解く場合についても計算精度を検証する。特性方向に分解してリーマン解法を適用する方法もあるが、多次元問題では次元分割する必要があり計算精度が落ちる。ここでは、波動方程式を保存形式のまま解く方法を示す。$f_{tt}-c^2f_{xx}=0$ は、変数 u を導入することにより

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-c\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=-c\frac{\partial f}{\partial x} \tag{6}$$

と等価である。ここで c は定数であるとすると、(6)式は保存形をしている。$F_{i+1/2}$ と $U_{i+1/2}$ をそれぞれ f と u の区間 $x_i \le x \le x_i+\Delta x$ で積分したものとすると、従属変数の配置は Fig.2 のようになる。

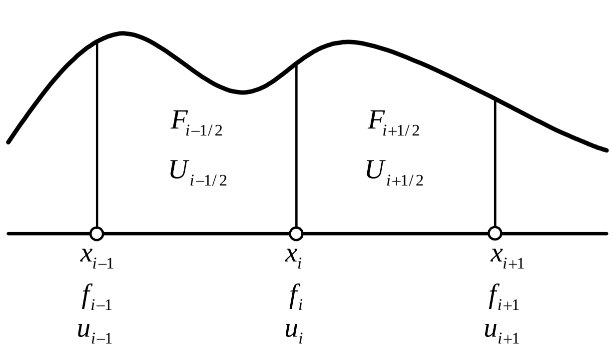

Fig.2 Configuration of the dependent variables

波動方程式は x の正と負の両方向に伝播する波を解として持つので、補間関数 $J(x)$ も x_i に対して中心対称の領域に張る必要があ

る。$J(x)$ の拘束条件として、$J(x_i)=f_i$，$\int_{x_{i-1}}^{x_i} J(x)dx = F_{i-1/2}$，$\int_{x_i}^{x_{i+1}} J(x)dx = F_{i+1/2}$ を置くと $J(x)$ は 2 次関数となり、$x=x_i$ での微係数は 2 次精度の

$$J_x(x_i)=\frac{F_{i+1/2}-F_{i-1/2}}{\Delta x}$$

さらに $J(x_{i+1})=f_{i+1}$ と $J(x_{i-1})=f_{i-1}$ の条件を加えると $J(x)$ は 4 次関数となり、微係数は 4 次精度の

$$J_x(x_i)=2\frac{F_{i+1/2}-F_{i-1/2}}{\Delta x}-\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}$$

になる。従って、(6)式の離散化は

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}=-c\left(2\frac{U_{i+1/2}-U_{i-1/2}}{\Delta x}-\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}\right)$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=-c\left(2\frac{F_{i+1/2}-F_{i-1/2}}{\Delta x}-\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2\Delta x}\right)$$

となる。(6)式を $x_i \le x \le x_i+\Delta x$ で積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{i+1/2}=-c\left(u_{i+1}-u_i\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}U_{i+1/2}=-c\left(f_{i+1}-f_i\right)$$

になる。陽的な 4 段ルンゲクッタ法で時間積分した場合には $CFL=c\Delta t/\Delta x<0.94$ まで安定に計算でき、図 2.30 に示すような 4 次の計算精度が得られる。

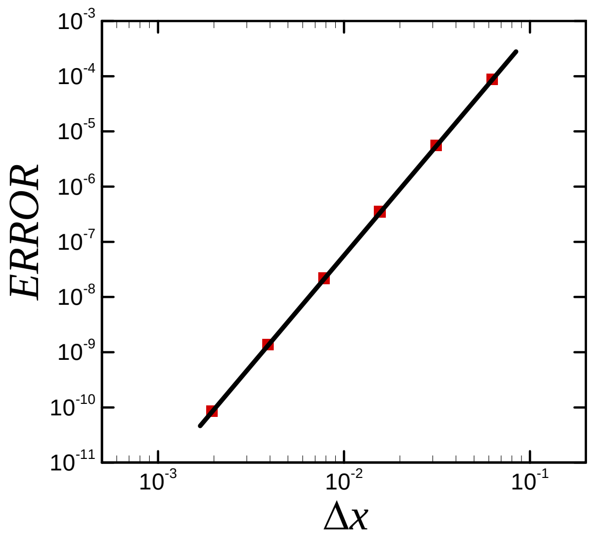

Fig.3 Accuracy of the wave equation result solved by the conservative IDO scheme.

4. オイラー方程式

圧縮性流体に対するオイラー方程式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad U=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ (E+p)u\end{bmatrix}$$

についても全く同じように保存形 IDO 法を適用することができ、衝撃波の位置も解析解と非常に良く一致する結果が得られる。方程式を移流・非移流に分離することもなく、高次精度のエルミート補間を用いた完全な保存形で方程式を高精度に解くことが可能になる。Fig.2 の実線は解析解である。

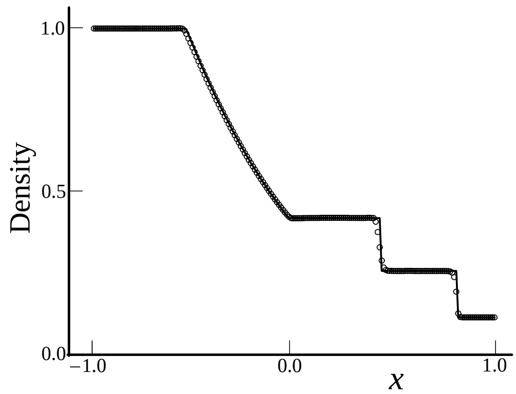

Fig.4 The computational result of the conservative IDO scheme for shock tube problem.

5. 多次元への拡張

2 次元の場合は図 2.28 のように x 方向の線積分値 $\rho_{i+1/2,j}$、y 方向の線積分値 $\zeta_{i,j+1/2}$ と面積分値 $M_{i+1/2,j+1/2}$ を多次元保存形 CIP 法と同じように定義する。

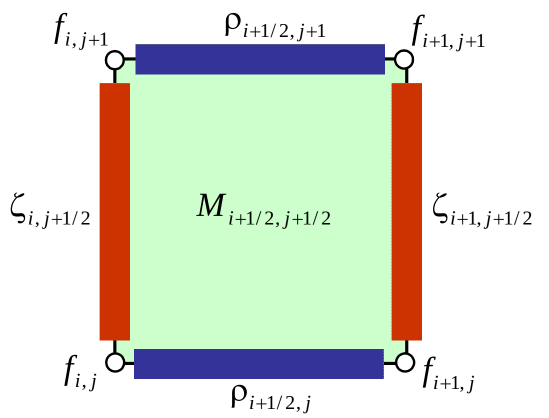

Fig.5 Configuration of 2-D dependent variables

$$f_t+(uf)_x+(vf)_y=0 \tag{7}$$

を解く場合、f に対しては 1 次元と同じように風上方向に張った補間関数を微分して f_x と f_y を求める。ρ については、(7)式を $x_i \le x \le x_i+\Delta x$ まで積分して、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{i+1/2,j}=-\left(u_{i+1,j}f^n_{i+1,j}-u_{i,j}f^n_{i,j}\right)-\int_{x_i}^{x_i+\Delta x}v_j f_{y,j}dx \tag{8}$$

となる。同じように $y_j \le y \le y_j+\Delta y$ で積分して、

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_{i,j+1/2}=-\int_{y_j}^{y_j+\Delta y}u_i f_{x,i}dy-\left(v_{i,j+1}f^n_{i,j+1}-u_{i,j}f^n_{i,j}\right) \tag{2.84}$$

となる。(8)式の右辺第 2 項の積分は、速度 v の線積分平均値を用いることにより近似的に

$$\int_{x_i}^{x_i+\Delta x} v_j f_{y,j} dx = \bar{v}_j \rho_{y,i+1/2,j}$$
$$= \bar{v}_j \left(\frac{6M_{i+1/2,j+1/2}}{\Delta y^2} - \frac{4\rho_{i+1/2,j} - 2\rho_{i+1/2,j+1}}{\Delta y} \right)$$

とすることができる。右辺の $\rho_{y,i+1/2,j}$ は(4)式において、$\Delta x \rightarrow \Delta y$，$f \rightarrow \rho$，$\rho \rightarrow M$ の置き換えを行ったものである。多次元 CIP 法における TYPE-C の考え方が保存形 IDO 法でも使われている。

(7)式を $x_i \le x \le x_i + \Delta x$ と $y_j \le y \le y_j + \Delta y$ の領域で面積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{i+1/2,j+1/2} = -\int_{y_j}^{y_j+\Delta y} \left(u_{i+1} f_{i+1} - u_i f_i \right) dy - \int_{x_i}^{x_i+\Delta x} \left(v_{j+1} f_{j+1} - v_j f_j \right) dx$$

速度に線積分平均値を使うと、

$$\frac{\partial}{\partial t} M_{i+1/2,j+1/2} = -\left(\bar{u}_{i+1,j+1/2} \zeta_{i+1,j+1/2} - \bar{u}_{i,j+1/2} \zeta_{i,j+1/2} \right) - \left(\bar{v}_{i+1/2,j+1} \rho_{i+1/2,j+1} - \bar{v}_{i+1/2,j} \rho_{i+1/2,j} \right)$$

となる。多次元の保存形 CIP 法では、流入・流出 flux を求める手続きはかなり煩雑になるため、オイラー型計算のメリットは大きい。3 次元の場合には、各方向の面積積分値に加えて、セルの体積積分値も従属変数として導入する必要がある。

剛体回転速度場 $u_x + v_y = 0$ で鍵型の初期プロファイルを一蹴する問題[3] (Fig.6) に保存形 IDO 法で計算した結果を示す。

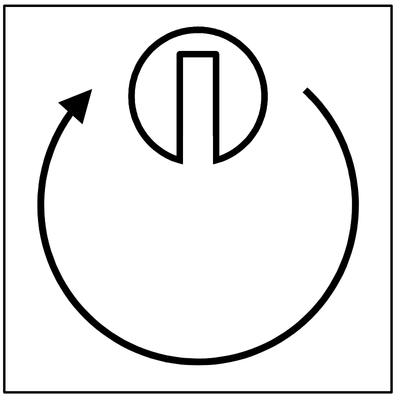

Fig.6 Solid rotation test of a cut cylinder of Zelesak problem[3].

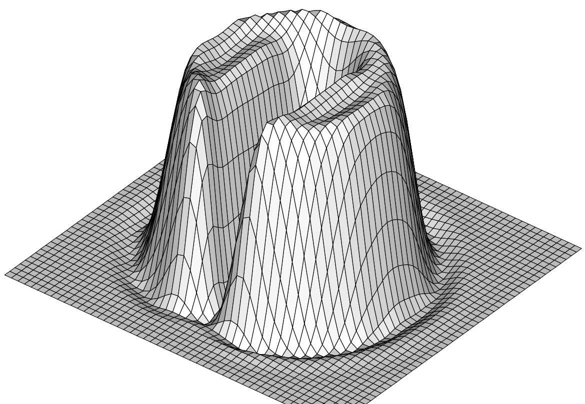

Fig.7 Computational result after one revolution by conservative IDO.

Zalesak 問題に関しては、非保存形 IDO 法で計算した結果と違いはほとんどない。

補間関数に Xiao によって提案された有理関数を用いることにより単調性を確保することができる。同じ Zelesak 問題に適用した結果を Fig.8 に示す。

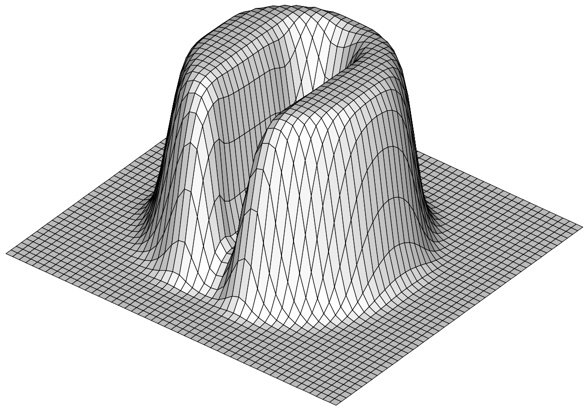

Fig.8 Computational result with the rational function[4] interpolation.

まとめ

保存形 IDO 法を開発し、1 次元、2 次元連続方程式に適用して検証を行った。Flux 形式での定式化を確保しつつ、安定した高精度計算が可能であることを示すことができた。波動方程式に対しても 4 次精度を持つことが分り、オイラー方程式で衝撃波を含む問題に適用できることを示した。

参考文献

(1) T. Aoki, Interpolated Differential Operator (IDO) Scheme for Solving Partial Differential Equations, Comp. Phys. Comm., 102 [1-3] (1997) 132-146.

(2) R. Tanaka, T. Nakamura, and T. Yabe, Constructing exactly conservative scheme in a non-conservative form, Comput. Phys. Comm., 126, 232 (2000).

(3) S. Zalesak, Fully Multidimensional Flux-corrected Transport Algorithms for Fluids, J. Comp. Phys., 31, 335, 1979.

(4) F. Xiao and X. Peng, A Convexity preserving scheme for conservative advection transport, J. Comp. Phys., 198, 389-402 (2004)